Euler, Goldbach and Exact Values of Cosine

Hieu Nguyen
Elizabeth Volz

July 13, 2009

Christian Goldbach

Born: 18 March 1690 in Königsberg, Prussia
Died: 20 Nov 1764 in Moscow, Russia

- Attended University of Königsberg where he mainly studied law, medicine, and some mathematics
- Well traveled and met with many of the leading scientists

Euler-Goldbach Timeline

1725	Goldbach is appointed recording secretary of newly established Imperial Academy of Sciences (later called St. Petersburg Academy of Sciences)
1727	Euler arrives in St. Petersburg to replace Nicolaus Bernoulli II
1728	Goldbach moves to Moscow to tutor Peter II
1729	Euler and Goldbach begin their 35-year long correspondence
1732	Goldbach moves back to St. Petersburg and is appointed correspondence secretary of the Academy
1740	Goldbach leaves the Academy for a senior position in the Ministry of Foreign Affairs
1741	Euler leaves St. Petersburg to join the Berlin Academy
1764	Goldbach dies
1766	Euler returns to St. Petersburg

Euler-Goldbach Correspondences

167 letters (1729 – 1764)

P.H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 1843; available on the Euler Archive: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/

Adolf P. Juškevič and Eduard Winter, *Leonhard Euler und Christian Goldbach : Briefwechsel* 1729-1764, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin Kl. Philos. (Berlin, 1965).

Forthcoming English translation(?)

Frequency of Their Correspondences

Year	Frequency
1729	2
1730	11
1731	3
1732	4
1735	2
1736	1
1737	1
1738	1
1739	7
1740	3
1741	8

Year	Frequency
1742	**16**
1743	16
1744	10
1745	12
1746	15
1747	11
1748	10
1749	8
1750	8
1751	7
1752	9

Euler-Goldbach Correspondences

Translation of *portions* of seven correspondences between Dec 1741 – June 1742:

Euler to Goldbach – Dec 9, 1741 (OO757)
Goldbach to Euler – Feb 13, 1742 (OO759)
Euler to Goldbach – Mar 6, 1742 (OO761)
Goldbach to Euler – April 12, 1742 (OO763)
Euler to Goldbach – May 8, 1742 (OO764)
Goldbach to Euler – June 7, 1742 (OO765) (Goldbach's conjecture)
Euler to Goldbach – June 30, 1742 (OO766)

Translation from German into English by:

- Elizabeth Volz (Rowan graduate student)

- Reinert Schmidt (Glassboro High School physics teacher)

Euler an *Goldbach*
Berlin, 28. Nov./9. Dez. 1741

CGADA: F. 181, D. 1413, Č. III
Blatt 267—268r

[. . .] Die sonderbare Freude, welche Ew. Hochedelgeb. über mein glückliches Etablissement geschöpfet, erkenne mit der schuldigsten Ehrerbietung; und da Dieselben mir bisher so ungemeine Proben Dero Gewogenheit und Freundschaft erwiesen haben, so wünsche nichts so sehr, als diese höchstschätzbare Zuneigung gegen mich beständig zu unterhalten. Ich hatte bei dieser Zeit gern aus Kuriosität meine Nativität nachgesehen, besann mich aber erst, daß ich dieselbe dem H. Prof. *Krafft* zurückgelassen.[1] Der H. Prof. *Stähelin* hat mir geschrieben, daß drei Exemplaria von den akademischen Kupferstichen[2] dem H. Brigadier *Baudan* mitgegeben worden. Welcher aber bis dato hier noch nicht angelanget.

Für Ew. Hochedelgeb. Bemühungen wegen meiner akademischen Affären statte hiermit allen gehorsamsten Dank ab; meine Absicht gehet anjetzo nur dahin, wie ich meine rückständige Gage mit der Bezahlung für mein Haus bekommen möge[3], wozu ich nächstens bei der Ankunft der akademischen Silberflotte gute Hoffnung habe.

/267 r/ Was die Pension anlangt, wozu man mir hat Hoffnung machen wollen, weilen ich darum in Petersburg nicht angehalten, so werde ich auch von hieraus deswegen nicht ferner supplizieren. Ich habe schon berichtet, daß meine hiesige Occupationes mich nicht verhindern, der Akademie jährlich ebensoviel Piecen zu überliefern, als wann ich noch daselbst gegenwärtig wäre; erachtet die Akademie diese meine geringe Dienste nützlich und einer Pension wert, so werde solche Gnade mit der größten Veneration erkennen und mich derselben aus allen Kräften würdig zu machen bestreben.

Für die mir kommunizierten Paradoxa des *Leuneschloß*[4] bin gehorsamst verbunden; es zeigen einige davon als von dem Ton der Glocken und Saiten eine richtige Einsicht in die Natur. Das von den Glocken steht aber schon in *Stifelii* Anmerkungen über die Coss *Christoff Rudolfs*.[5] Dasjenige, welches Ew. Hochedelgeb. zuerst von der annihilierten Materia in einem Geschirr geschrieben, scheinet auf diesem Ratiocinio zu beruhen: Ist keine Materie zwischen den Seiten des Gefäßes, so ist nichts dazwischen, ist aber nichts dazwischen, so sind die Seiten aneinander, ungeacht das Gefäß seine vorige Figur behält. Ich halte aber dieses Ratiocinium für ein bloßes Sophisma und bei weitem nicht hinreichend, die impossibilitatem vacui in mundo zu erweisen.

Der H. Geh. Rat *Wolff* oder vielmehr seine Anhänger haben neulich einen harten Streit mit dem H. *Segner*, Prof. Math[eseos] in Göttingen, bekommen[6], indem dieser einige grobe Fehler in des H. *Wolffs* Elementis Matheseos /268/ vorgab gefunden zu haben; es sind beiderseits schon verschiedene Schriften gewechselt worden. Der H. *Segner* aber hat recht, und von seiten des H. *Wolffs* sind die Defensionen so schlecht beschaffen, daß daher der *Wolff*ianischen Philosophie wenig Ehre zuwächst; man hätte besser getan, die Fehler zu erkennen, weilen dieselben ganz offenbar sind, und dieselben in einer neuen Ausgabe, woran wirklich gearbeitet wird, zu verbessern.

Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nämlich, daß der Wert von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differiert nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Wert aber dieser Expression ist der Kosinus dieses arcus 0,6931471805599 oder der arcus von $39°, 42', 51'', 52''', 9^{IV}$ in einem Circul dessen Radius $= 1$.[7]

Ich habe auch noch verschiedene wichtige Decouverten gemacht über die Integration solcher Formulen $\frac{P\,dx}{Q}$, allwo P und Q functiones quaecunque rationales von x sind. Wovon zu einer anderen Zeit die Ehre haben werde, Ew. Hochedelgeb. ausführlicher zu schreiben.[8]

Vorjetzo habe die Ehre, Ew. Hochedelgeb. noch gehorsamst zu berichten, daß meine Frau letztens mit einer Tochter[9] glückl[ich] niedergekommen, der ich mich und alle die meinen Dero schätzbaren Gewogenheit untertänig empfehle und mit aller schuldigen Hochachtung verharre [. . .]

/268 r/ P. S. Wegen des H. *Stoschen* habe ich mich hier informiert, der H. Prof. *Muzelius* im Joachimstalischen Gymnasio hat seine [*Stosch*s] Schwester [geheiratet], derselbe befindet sich wirklich zu Florenz, allwo er von dem Großherzog eine reiche Pension genießt und seinen jüngeren Bruder bei sich hat, welcher auch ein großer Antiquarius sein soll. Von dem H. *Hedlinger* habe ich letztens Briefe[10] gehabt aus Arlesheim im Bistum Basel, worin er mir schreibt, daß die gegenwärtigen Konjekturen nicht erlauben, nach Norden zu reisen. Er arbeitet dort aus eigenem Trieb an einer Medaille zu Ehren Ihro Königl. Majestät unseres Allergnädigsten Monarchen. Wegen der jetzigen weit aussehenden Aspekten haben I. K. M. die Einrichtung der hiesigen Akademie auf eine bessere Zeit aufzuschieben allergnädigst geruhet, und alsdann soll auch der H. *Maupertuis* wiederum hieher kommen. Ich lebe inzwischen in der erwünschtesten Ruhe und habe das Vergnügen, meinen Studiis so obliegen zu können, daß ich nicht einmal aus dem Hause komme. Wie ich denn den H. Geh. Rat *Vockerodt,* welcher schon eine geraume Zeit hier ist, noch nicht einmal gesehen.

Euler to Goldbach – Dec 9, 1741 (OO757)

Ich habe letztens auch ein merkwürdiges Paradoxon gefunden, nämlich, daß der Wert von dieser Expression $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\frac{10}{13}$, und dieser Bruch differiert nur in partibus millionesimis von der Wahrheit. Der wahre Wert aber dieser Expression ist der Kosinus dieses arcus 0,6931471805599 oder der arcus von $39°, 42', 51'', 52''', 9^{IV}$ in einem Circul dessen Radius $= 1.$[7]

I have lately also found a remarkable paradox. Namely that the value of the expression

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

is approximately equal to 10/13 and that this fraction differs only in parts per million from the truth. The true value of this expression however is the cosine of the arc .6931471805599 or the arc of 39 degrees 42 min. 51 sec. 52 tenths of sec. and 9 hundredths of sec. in a circle of radius one.

Goldbach to Euler – Feb 13, 1742 (OO759)

quicunque ist, niemals ein quadratum geben könne.[4]

Bei der observation, so Ew. H. mir kommunizieret, daß $\dfrac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ quam proxime gleich sei $\dfrac{10}{13}$, ist mir eingefallen, daß, wann man machen wollte, daß $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ würde, alsdann p kleiner als 3 und größer als 2 sein müßte; ich gestehe, daß diese limites grosso modo angegeben sind, habe aber nicht die curiosité, sie näher zu determinieren.[5]

I have noticed that if you wanted to make it so that

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

than *p* would have to be smaller than 3 and larger than 2. I confess that these limits are large but I do not have the curiosity to determine them any closer.

Euler to Goldbach – March 6, 1742 (OO761)

/7 r/ Daß Ew. Hochedelgeb. die Curiosité gehabt zu untersuchen, wann diese Formel $2^{+p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ nihilo aequalis werden könnte, hat mir Anlaß gegeben anzumerken, daß solches infinitis modis geschehen [könne]: der erste Valor pro p ist wie Ew. Hochedelgeb. observiert, zwischen 2 und 3, nämlich $p = 2{,}26618021$, der wahre Valor aber ist $p = \frac{\pi}{2l2}$, da ist $\pi = 3{,}14159265$, und $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. $= 0{,}6931471805$. Alle folgenden Valores ipsius p entspringen aus diesem, indem man diesen mit 3, 5, 7, 9, etc. multipliziert.[5]

Now that I have the curiosity to investigate when

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

it has given me the opportunity to remark that this can happen in infinitely many ways. First observe that p is between 2 and 3, namely 2.26618021. The true value is p= π /(2l2) where π = 3.14159265 and l2=1-1/2+1/3-1/4+etc. = .6931471803. All following values are derived out of this in that you multiply these with 3, 5, 7, 9, etc.

Euler’s Paradox

$$\cos(\ln 2) = \frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = 0.769239\ldots$$

$$\frac{10}{13} = 0.769231\ldots$$

Euler gives no explanation for this paradox and no indication if this is coincidental.

Euler's Solution

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

$$e^{p\ln 2\sqrt{-1}} + e^{-p\ln 2\sqrt{-1}} = 0$$

$$2\cos(p\ln 2) = 0$$

$$p\ln 2 = \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\therefore\ p = \frac{(2n+1)\pi}{2\ln 2}$$

Euler’s Formula

To my knowledge these correspondences indicate the earliest known application of Euler’s famous formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

first published in Euler’s 1748 pre-calculus textbook, *Introductio in analysin infinitorum* [E101].

Goldbach to Euler – April 12, 1742 (OO763)

Es ist meines Erachtens auch remarquable, daß, wann man p durch diese Äquation determinieret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right] - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right]$$

sooft x ein numerus integer ist.

It is in my opinion also remarkable that when you determine *p* through

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$$

also then this will become

$$2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}} - \frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}$$

as long as *x* is an integer.

Goldbach's Solution

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$$

$$a + \frac{1}{a} = 3 \quad (a = 2^{p\sqrt{-1}})$$

$$\therefore a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \left(\frac{1}{a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

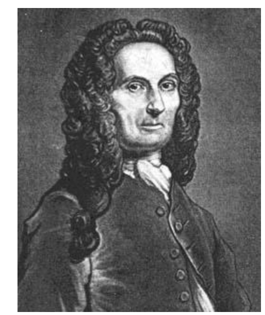
$$2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} = y^x + y^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}} - \frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}$$

Binet’s Formula

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]$$

Observe that Goldbach’s solution resembles Binet’s formula for Fibonacci numbers. However, neither Euler nor Goldbach mention this connection, which is surprising given the simple recursive nature of the Fibonacci numbers and circumstances suggesting that Euler knew of them.



1722 De Moivre uses formula to derive generating function for Fibonacci numbers

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

1728 D. Bernoulli publishes formula

1743 J. P. Binet publishes formula

1767 Euler publishes formula in E326

Connection to Fibonacci numbers:

$$2F_{2n} + F_{2n+1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{2n+1} - (-1+\sqrt{5})^{2n+1}}{2^{2n+1}},$$

$$2F_{2n} - F_{2n-1} = \frac{(1+\sqrt{5})^{2n-1} - (-1+\sqrt{5})^{2n-1}}{2^{2n-1}}.$$

$$\therefore 2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = F_{2n+1} + F_{2n-1}$$

Observe that the sequence

$$x_n = F_{2n+1} + F_{2n-1}$$

satisfies the recurrence

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$$

$$(x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 18, \ldots)$$

Exact Values of Cosine

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$$

$$\cos(np \ln 2) = \frac{1}{2} \; 2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Euler's General Case

$$a^{pi} + a^{-pi} = b$$

$$y + \frac{1}{y} = b \quad (y = a^{pi})$$

$$\therefore y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

$$\cos[np \ln a] = \frac{1}{2}\ \ a^{npi} + a^{-npi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2}\right)^n\right]$$

Exact Values of Sine

$$a^{pi} - a^{-pi} = b$$

For *n* odd:

$$\sin[np \ln a] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^n\right]$$

For *n* even:

$$\sin[np \ln a] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)^n\right]$$

Linear Recurrences

Theorem: If $x_0 = 1, x_1 = b$ and more generally

$$x_n = a^{npi} + a^{-npi}$$

then x_n satisfies the recurrence

$$x_{n+2} = bx_{n+1} - x_n$$

Proof: Since each elementary solution a^{npi}, a^{-npi} satisfies the recurrence, it follows the same for $x_n = a^{npi} + a^{-npi}$:

$$a^{pi} + a^{-pi} = b$$

$$a^{pi} = b - a^{-pi}$$

$$a^{(n+2)pi} = ba^{(n+1)pi} - a^{npi}$$

Observe that a direct formula can be derived for such a linear recurrence:

$$x_n = \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 4}}{2} \right)^n + \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - 4}}{2} \right)^n$$

Thus:

$$\cos[np \ln a] = \frac{1}{2}\ \ a^{npi} + a^{-npi}\ \ = \frac{1}{2} x_n$$

Theorem: If $x_0 = 0, x_1 = b$ and more generally

$$x_n = a^{npi} + (-1)^n a^{-npi}$$

then x_n satisfies the recurrence

$$x_{n+2} = b x_{n+1} + x_n$$

Hyperbolic Analogue

In 2007 T. Osler found analogous formulas for hyperbolic cosine (and sine):

$$x_0 = 0, x_1 = 1 \qquad y_0 = 2, y_1 = M$$

$$x_{n+2} = Mx_{n+1} + x_n \qquad y_{n+2} = My_{n+1} + y_n$$

$$\psi = \frac{M + \sqrt{M^2 + 4}}{2}$$

$$\cosh(n \log \psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} y_n & \text{for } n \text{ even} \\ \frac{\sqrt{M^2+4}}{2} x_n & \text{for } n \text{ odd} \end{cases}$$

References

Bernoulli, D., *Observationes de Seriebus Recurrentibus*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 3 (1728), 85-100.

Binet, J. P., *Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque, à coefficients variables*. Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), 17 (1843), 559-567.

Euler, L., *Observationes analyticae*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 11 (1767), 124-143.

L Euler and C Goldbach, Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764, *Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin Kl. Philos.* (Berlin, 1965).

de Moivre, A., De Fractionibus Algebraicis Radicalitate Immunibus ad Fractiones Simpliciores Reducendis, Deque Summandis Terminis Quarumdam Serierum Aequali Intervallo a Se Distantibus, Philos. Trans., 32 (1722), 162-178.

T. Osler, *More exact values of the hyperbolic functions*, Mathematics and Computer Education, 42(2008), pp. 193-197

Volz, Elizabeth. *An English translation of portions of seven correspondences between Euler and Goldbach on Euler's complex exponential paradox and special values of cosine*, posted at:
www.rowan.edu/colleges/las/departments/math/facultystaff/nguyen/euler/index.html